

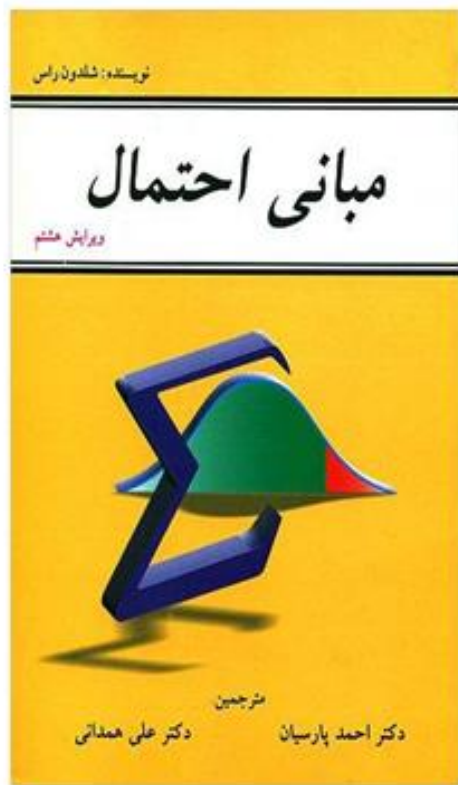
احتمال مهندسی

فصل اول: اصول شمارش

سید مهدی سجادیه



فهرست مطالب



• مرجع

• مبانی احتمال

احتمال = عقل سلیم

• ضرورت درس احتمال

• مباحثی که علم به آن مساله ممکن نیست

• مباحثی که محاسبه ممکن نیست (به صرفه نیست)

- آنالیز ترکیبیاتی
- مبانی احتمال
- احتمال شرطی و استقلال

- متغیر تصادفی
- متغیر تصادفی پیوسته
- متغیرهای تصادفی توأم
- خواص امید ریاضی
- قضایای حدی

ارزشیابی

- میانترم ۶ نمره
- پایانترم ۱۱ نمره
- حضور در کلاس و حل تکالیف ۴ نمره

آزمایش تصادفی

● آزمایش تصادفی :

آزمایشی که نتیجه آن از قبل به طور قطعی معلوم نباشد
مانند پرتاب سکه، پرتاب تاس، پیش بینی نتیجه فوتبال
فضای نمونه:

● تمام حالت‌های ممکن برای یک آزمایش تصادفی (قرارداد با S
نشان می‌دهیم)

● تعریف احتمال پیشامد

● نسبت تعداد دفعات رخ دادن پیشامد A در n آزمایش وقتی
که n به سمت بینهایت میل می‌کند.

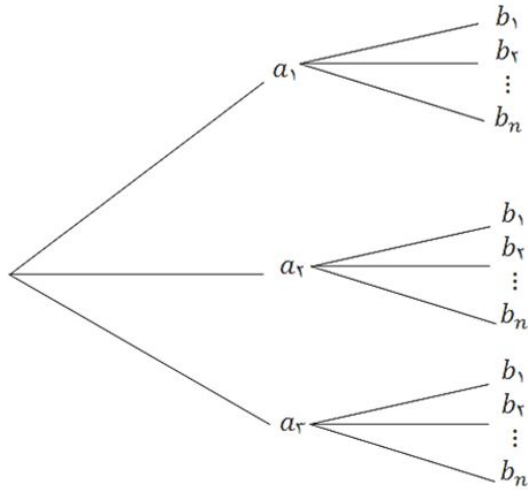
$$\Pr(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

● شمارش یکی از نکات مهم در محاسبه احتمال

اصل شمارش

- اصل و:

– اگر دو عمل که اولی به m حالت و دومی به n حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به $m \cdot n$ حالت قابل انجام است.



- **مثال:** جامعه ای شامل ۱۰ خانواده است که هر خانواده دو فرزند دارد.

- الف) اگر بخواهیم از این جامعه یک مادر و یکی از فرزندان را انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟ $20 = 2 * 10$

- ب) اگر بخواهیم از این جامعه یک مادر و یک کودک انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟

- $200 = 20 * 10$

اصل جمع

- اصل یا:

– اگر عملی را بتوانیم به دو روش اجرا کنیم به طوریکه که روش اولی به m حالت و روش دوم به n حالت قابل انجام باشند این عمل به $m+n$ حالت قابل انجام است.

- **مثال:** فرض کنید می خواهید یک ماشین تهیه کنید. در صورتیکه دو نمایشگاه وجود داشته باشد و در نمایشگاه اول ۴ ماشین و در نمایشگاه دوم ۳ ماشین وجود داشته باشد

- الف) به چند طریق از این دو نمایشگاه می توانید یک ماشین تهیه کنید؟

$$7 = 4 + 3$$

- ب) اگر بخواهیم از نمایشگاه اول یک ماشین و از نمایشگاه دوم نیز یک ماشین تهیه کنیم چند حالت وجود دارد؟

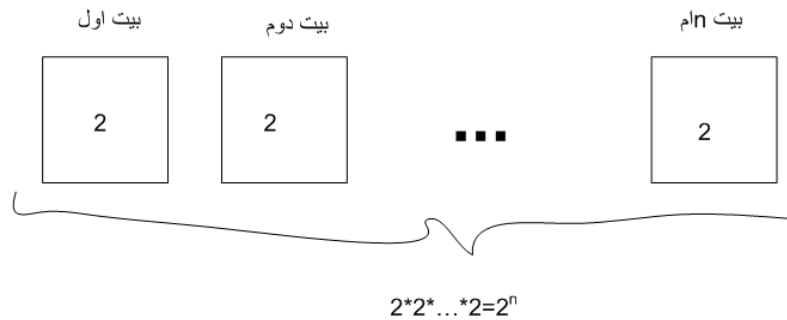
$$12 = 4 * 3$$

تعمیم اصل شمارش

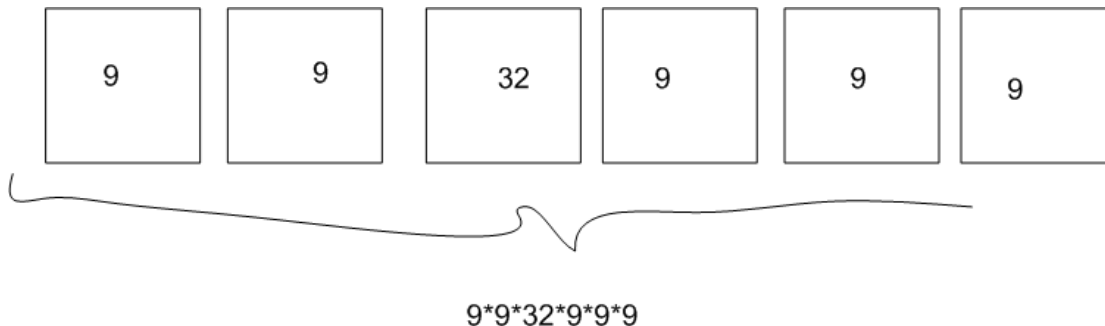
- **تعمیم اصل و:**

– اگر k عمل که اولی به m_1 حالت، دومی به m_2 حالت، ... و k امی به m_k حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به $m_1 * m_2 * \dots * m_k$ حالت قابل انجام است.

- **مثال:** چند عدد n رقمی می توان نوشت که ارقام آن فقط صفر یا یک باشد (اگر سمت راست یک n بیتی صفر باشد آن صفرها حذف نمی شود)؟



- **مثال:** چند پلاک اتومبیل با یک حرف الفبا و ۵ رقم با ارقام غیر صفر می توان نوشت؟



مثال

ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، داده شده اند.

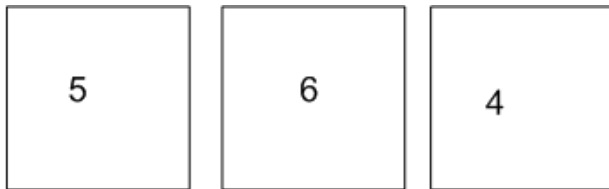
الف) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی می‌توان ساخت به شرطی که اعداد حاصل دارای ارقام تکراری نباشند.

ب) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی می‌توان ساخت هرگاه تکرار ارقام مجاز باشد.

پ) با این ارقام چند عدد ۳ رقمی فرد می‌توان ساخت که دارای ارقام تکراری نباشند.



$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$



$$5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$$



$$7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

- ۴ رقم فرد در رقم آخر (۱، ۳، ۵ و ۷)
- یک رقم حذف می‌شود برای رقم دوم عدد سه رقمی
- دو رقم برای رقم سوم حذف می‌شود

جایگشت

- اگر r عضو وجود داشته باشد (عضو مجزا) و ترتیب قرار گرفتن آنه برای ما مهم باشد گوییم جایگشت r تایی داریم.
- تعداد جایگشت‌های r تایی برابر است با:
 $r! = r * (r-1) * (r-2) * \dots * 2 * 1$

- **مثال:** فرض کنید در یک کلاس ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر حضور دارند. پس از برگزاری امتحان نمرات آنه به چند صورت قابل نمایش است اگر
- الف) محدودیتی در لیست نباشد؟

10!

- ب) لیست دخترها و پسرها جدا باشد؟
- **6!*4!**

مثال

- شخصی ۱۰ کتاب دارد که ۴ تای آنها ریاضی، ۳ تای آن برق، ۲ تای آن فیزیک و یکی از آنها زبان است. وی می خواهد کتابها را در یک قفسه بچیند. به چند طریق می تواند کتابها را در یک قفسه بچیند به طوریکه
- الف) هیچ محدودیتی نداشته باشد.

• **10!**

- ب) بخواهد کتابهای با موضوع یکسان در کنار هم باشند.

• حل: جابه جایی کتابهای ریاضی 4!

• جابه جایی کتابهای برق 3!

• جابه جایی کتابهای فیزیک 2!

• جابه جایی کتابهای زبان 1!

• جابه جایی نوع کتابها 4! (۴ نوع کتاب)

$$4! * (4! * 3! * 2! * 1!)$$

ترتیب

- فرض کنید n عضو داریم و می خواهیم k تا از آنها را انتخاب کنیم ($k \leq n$) به طوریکه ترتیب اعضا برای ما مهم باشد. به چند طریق اینکار قابل انجام است؟

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - k + 1) = n! / (n - k)!$$

- **مثال:** فرض کنید چهار عضو a, b, c, d وجود دارند. چند ترتیب برای انتخاب دو عضو از این مجموعه وجود دارد.

ab ac ad ba bc bd
ca cb cd da db dc

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

جایگشت با ویژگی های خاص

• **مثال:** با حروف کلمه ABC چند کلمه سه حرفی می توان بدون تکرار می توان نوشت (بدون توجه به معنی)؟

• حل

• $3! = 6$

• ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

• **مثال:** با حروف کلمه ABB چند کلمه سه حرفی می توان بدون تکرار می توان نوشت (بدون توجه به معنی)؟

• حل : (جایگزینی C با B)

• ABB, **ABB**, BAB, BBA, **BAB**, **BBA**

• ۳ تا

جایگشت با ویژگی های خاص

- اگر یک مجموعه n تایی داشته باشیم که k_1 عضو آن یک شکل، k_2 عضو آن شکل دیگر و ... k_r تای آن شکل مجزا از $r-1$ شکل قبل باشند در این صورت تعداد جایگشتها برابر است با:

$$n!$$

$$(k_1!)(k_2!)\dots(k_r!)$$

- **مثال:** با حروف کلمه PERRER چند کلمه دیگر شش حرفی می توان ساخت؟

$$\frac{6!}{(3!)(2!)(1!)} = 60$$

- **مثال:** با حروف کلمه مامان چند کلمه ۵ حرفی غیر تکراری می توان ساخت؟

$$\frac{5!}{(2!)(2!)(1!)} = 15$$

جایگشت با ویژگی های خاص

• **مثال:** در یک مسابقه شطرنج، از ۱۰ بازیکن شرکت کننده، ۴ بازیکن شرکت کننده، ۴ نفر آمریکایی، ۳ نفر روس، ۲ نفر انگلیسی و یک نفر ایرانی هستند. اگر نتایج بر اساس ملیت اعلام شود به چند طریق این نتایج می تواند اعلام شود؟

• **حل:** دقت کنید که در این مساله افرادی که ملیت یکسان دارند مانند هم هستند (مانند مساله کتابها مجزا نیستند) اگر فرض کنیم آمریکایی با U، روسیه با R، انگلیسی با E و ایرانی با I نشان داده شوند باید گفته شود کلمه **UUUURRREEI** به چند طریق قابل نمایش است که برابر است با:

$$\frac{10!}{(4!)(3!)(2!)(1!)}$$

سپاس

